EXERCICE N°1 : 40' 6 points

Soit la fonction f définie sur]0 , 3] par $f(x) = 1 - \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f en 3 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que f est dérivable sur]0 , 3[et que pour tout $x \in]0 , 3[$, $f'(x) = \dfrac{9}{x^2\sqrt{9 - x^2}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f et montrer que f réalise une bijection de]0 , 3] sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Montrer que l'équation f(x) = - x admet dans]0 , 3] une solution unique α et que 1,2 < α < 1,3.

3) Déterminer l'intersection de ζ_f avec l'axe des abscisses. Tracer dans un même repère ON ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$.

4) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$. f^{-1} est – elle dérivable en 1 ?

5) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x dans J.

6) On considère la fonction h définie sur [0 , π/2[par $h(x) = f(3\cos x)$.

a) Montrer que pour tout x de [0 , π/2[, h(x) = 1 - tan x.

b) Montrer que h est une bijection de [0 , π/2[sur]-∞ , 1].

c) Montrer que h^{-1} est dérivable sur]-∞ , 1] et déterminer $\left(h^{-1}\right)'$.

EXERCICE N°2 : 40' 6 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - \dfrac{1}{2}$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; Interpréter ses limites graphiquement.

2) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in]-1 , -½[$.

3) a) Déterminer l'équation de la tangente T à C_f au point I d'abscisse 0 .

b) Justifier que I est un point d'inflexion de Cf.

4) a) Montrer que f réalise une bijection et expliciter sa fonction réciproque f^{-1}.

b) Tracer T et les courbe C_f et $C_{f^{-1}}$ dans un même repère R.

5) Soit g la fonction définie sur $]-\infty , 0]$ par : $\begin{cases} g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]-\infty , 0[$ et calculer g'(x).

b) Soit x < 0. Montrer qu'il existe $c \in]x , 0[$ tel que g(x) + 1 = c x f'(c).

c) En déduire que g est dérivable à gauche en 0 et que $g'_g(0)=0$. Dresser le Tv de g.

Qarray.tn - Adra Blech - Qarray.tn